584. 表現論ニ於ケル一定理ノ証明

大島 勝

Kヲ代表的閉体, $\mathfrak{G}$ヲ位数gノ有限群トスル Kノ標数ガ零又ハgヲ割ラナイ素数デアルトキハ, Kニ於ケル$\mathfrak{G}$ノ

異ナル既約表現ノ個數ハ、$\mathfrak{G}$ ノ共軛類ノ個數ニ等シイ。中山及ビ正田先生ハコノ良ク知ラレテヰル定理ヲ次ノ如ク一般ニセラレタ。

(Über die Darstellung einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journ. of Math 12 (1936))

$\mathfrak{H}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ不變部分群トスルトキ、$\mathfrak{H}$ ノ絶對既約表現ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{G}$ ノ K ニ於ケル異ナル表現ノ個數ハ $\mathfrak{H}$ ニ含マレテヰル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類ノ個數ニ等シイ。

前記論文ニ於テハ、コノ定理ヲ halblinear Transformation ノ理論ニヨリ導カレタが、次ニ示ス如ク Braner ノ方法ヲ用フルコトニヨリ直接ニ証明スルコトが出來ル。

(Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern, Actualites scientifiques et industrielles 195 (1935))

且ツ g が p デ割レルトキデモ ($\mathfrak{G}:\mathfrak{H}$) が p ト素デアレバ、コノ場合ヲモ含メテ、次ノ定理ヲ得ル。

定理：$\mathfrak{H}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ不變部分群デ ($\mathfrak{G}:\mathfrak{H}$) ハ p デ割レナイトスル。$\mathfrak{H}$ ノ絶対既約表現ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{G}$ ノ K ニ於ケル異ナル表現ノ個数ハ $\mathfrak{H}$ ニ含マレテヰル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類デ、ソノ Element ノ位数が p ト素ナルモノノ個数ニ等シイ。

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{H} G_{t-1} \qquad t \not\equiv 0 \pmod p$$

トスレバ

$$\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{h}} + \overline{\mathfrak{h}} G_1 + \cdots\cdots + \overline{\mathfrak{h}} G_{t-1}$$

コヽニ $\overline{\mathfrak{g}}$, $\overline{\mathfrak{h}}$ ハ夫々 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ノKニ於ケル *Gruppenring* ヲ表ハス。

補助定理1. $\mathfrak{N}$ ヲ $\overline{\mathfrak{h}}$ ノ根基トスレバ

$$\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N} G_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{N} G_{t-1}$$

ハ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ根基デアル。

証明: $\overline{\mathfrak{N}}$ ハ明ラカニ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ *nilpotent Ideal* デアル、且ツ

$$\overline{\mathfrak{g}}/\overline{\mathfrak{N}} \cong \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{N} + \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{N}\, G_1 + \cdots\cdots + \overline{\mathfrak{h}}/\mathfrak{N} \cdot G_{t-1}$$

故ニ $\quad \overline{d} = (t^a d)^t \not\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p)$

コヽニ d, $\overline{d}$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ *reduzient Darstellung* $\mathfrak{D}$ ノ判別式, 及ビ $\mathfrak{D}$ ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{g}$ ノ表現ノ判別式デアリ、a ハ $\mathfrak{D}$ ノ次数トスル。

補助定理1ヨリ

補助定理2. $\mathfrak{h}$ ノ絶對既約表現ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{g}$ ノKニ於ケル表現ハ完全可約デアル。

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ ノ絶對既約表現ヲ夫々 $\mathfrak{D}_i^*$, $\mathfrak{D}_j$ デ表ハシ、ソノ指標ヲ χ_i^*, χ_j トスル。*Levitzki* ニヨリ

$$\chi_\lambda^*(H) = \sum_i \gamma_{i\lambda} \chi_i(H). \qquad H \in \mathfrak{h}$$

$$\psi_{\chi_i}(G) = \sum_\lambda \gamma_{i\lambda} \chi_\lambda^*(G) \qquad G \in \mathfrak{g}$$

但シ ψ_{χ_i} ハ $\mathfrak{D}_i$ ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{G}$ ノ表現ノ指標デアル、$\mathfrak{h}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ不変部分群デアルカラ

$$\gamma_{i\lambda} = \frac{\chi_\lambda^*(E)}{S_i \chi_i(E)} \neq 0 \qquad (mod.\ p)$$

從ツテ

$$\chi_\lambda^*(H) = \frac{\chi_\lambda^*(E)}{S_i \chi_i(E)} \sum_j \chi_i^{(j)}(H)$$

コヽニ S_i ハ $\mathfrak{D}_i$ ト $\mathfrak{G}$ ニ於イテ相似ナル表現ノ個数 $\chi_i^{(j)}(H)$ ハソノ指標ヲ表ハス。

$\mathfrak{G}$ ニ於テ互ニ相似デナイ $\mathfrak{h}$ ノ既約表現ヲ $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots\cdots\cdots, \mathfrak{D}_l$ トスレバ、$\mathfrak{D}_i$ ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{G}$ ノ表現ハ互ニ同値デナク、ソノ指標 ψ_{χ_i} $(i=1,2,\cdots\cdots,l)$ ハ linear unabhändig デアル。

以下 $\mathfrak{G}$ ノ表現ノ中、$\mathfrak{h}$ ノ表現ヨリ誘導セラレタ表現ノミヲ考ヘ、ソノ指標ヲ ψ_χ デ表ハスコトニスル。即チカカル $\mathfrak{G}$ ノ表現ニ於イテ、Braner ノ証明ニ於ケル既約表現ノ役目ヲ $\mathfrak{D}_i$ ヨリ誘導セラレタ $\mathfrak{G}$ ノ表現 Γ_i ガスルワケデアル。

補助定理3. 位数ガ p ト素ナル $\mathfrak{h}$ ノスベテノ Element R ニ對シテ $\psi_\chi(R)=0$ デアレバ、$\mathfrak{G}$ ノスベテノ Element R ニ對シテ $\psi_\chi(R)=0$

証明: 明ラカニ $\psi_\chi(R)=0$, $R \neq \mathfrak{h}$ ナル故, Braner ノ場合ト同様ニシテ証明出來ル。

$\mathfrak{h}$ ニ含マレテヰル $\mathfrak{G}$ ノ共軛類ガ、ソノ Element ノ

位數ガpト素ナルモノヲ，$C_1, C_2, \cdots\cdots, C_k$トスルトキ，先ヅ

$$l \leqq k$$

デアル。（Brauer ノ証明參照）

故ニk個ノ異ナル既約表現Γ_iガ存在スルコトガ云ヘレバ我々ノ定理ガ証明出來タコトニナル。

ソノ爲ニ$l<k$ト假定スル、然ルトキハ

$$\sum_{k} \eta_k \psi_{x_i}^{k} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots\cdots, l)$$

ニ於テ$\eta_k \in K$ハスベテハ零デナル取ル事ガ出來ル、從ツテスベテノ指標ニ對シテ

$$\text{(I)} \quad \sum_{k} \eta_k \psi_{x}^{k} = 0$$

$\psi_{x_i}^{k}, \psi_{x}^{k}$ハ夫々$C_k$ノElementニ對スル$\psi_{x_i}, \psi_x$ノ値ヲ表ハス。(I)ガ成立シナイコトヲ云ヘバ充分デアル、ソノ爲ニgヨリ位數ガ小ナル群ニツイテハ定理ハ既ニ成立スルモノト假定スル。

Qヲ位數qガpト素ナル$\mathfrak{h}$ノElementトシ，Qノ$\mathfrak{h}$ニ於ケルNormalizatorノpニ屬スルSylow-gruppeヲ$\mathfrak{p}$，ソノ位數ヲp^{μ}トスル。Qト$\mathfrak{p}$ハ位數qp^{μ}ノ$\mathfrak{h}$ノ部分群$\mathfrak{R}'$ヲ生成スル。

Qニヨリ生成サレタ$\mathfrak{h}$ノ部分群ヲ$\mathfrak{U}$トスレバ

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{U} \times \mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{h}$ノ$\mathfrak{R}'$ニヨルRestklasseノ代表元ヲ$P_1, P_2, \cdots\cdots$

……, P_sトシ、$\psi(R)$ヲ$\mathfrak{R}$ノ任意ノ指標トスル。

$\mathfrak{R}$ニ含マレナイ$\mathfrak{h}$ノ Element Sニ對シテハ $\psi(S)=0$ト置ケバ

$$\sum_{\nu=1}^{n}\psi(P_\nu R P_\nu^{-1})=\chi(R) \qquad R\in\mathfrak{h}$$

ハ$\mathfrak{h}$ノ指標トナル。Rノ位數ガpト素ナルトキハ

$$\chi(R)=\sum_{\lambda=1}^{q} z_\lambda\,\psi(Q^\lambda)$$

コヽニz_λハ$P_\nu R P_\nu^{-1}=Q^\lambda$ガ成立スル$P_\nu$ノ個數デアル。

$R=Q$ノトキハ

$$z_1 \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

RガQト$\mathfrak{h}$ニ於テ共軛デナケレバ

$$z_1=0$$

従ッテRガQト$\mathfrak{g}$ニ於テ共軛デナケレバ勿論$z_1=0$

$\mathfrak{h}$ニ含マレナイ$\mathfrak{g}$ノ Element Sニ對シテ$\chi(S)=0$トスレバ

$$\sum\chi(G_iRG_i^{-1})=\psi_\chi(R)$$

ハ$\mathfrak{g}$ノ指標トナル。

GQG^{-1}ガQト$\mathfrak{h}$ニ於テ共軛トナル如キ$\mathfrak{g}$ノ Element Gノ全体ハ$\mathfrak{h}$ヲ含ンダ$\mathfrak{g}$ノ部分群ヲナス、ソノ位數ヲrhトスレバ

$$r\not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

$$\psi_\chi(Q) = \sum_{\lambda=1}^{g} \gamma z_\lambda \psi(Q^\lambda)$$

コノ $\psi_\chi(R)$ ニツイテモ(I)ガ成立シナクテハナラナイ。今 C_δ ヲ $\eta_\delta \neq 0$ ナル共軛類トシ、Q ヲ C_δ ヨリ取ルトスル。$\delta \leqq h$ ナル故 Q ノ倍数 g ハタシカニ p ト素デアル。

(I) ハ次ノ形ニ出來ル。

$$\text{(II)} \quad \sum_{\lambda=1}^{g} \omega_\lambda \psi(Q^\lambda) = 0$$

$\psi(Q)$ ハ C_δ ノミニ関係スルカラ

$$\omega_1 = \gamma z_1 \eta_\delta \neq 0$$

(II) ハ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノスベテノ指標 ψ ニツイテ成立シナクテハナラナイ。シカルニ (II) ハ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ對シテ丁度 $\mathfrak{g}$ ニ對スル (I) ト同様ノ関係式デアリ、シカモ $\omega_1 \neq 0$ ナル故、スベテノ ω_δ ハ零デナイ。$\mathfrak{g}$ ヨリ次数ガ小ナル群ニツイテハ、カヽル形ノ関係ハ成立シナイト假定シタノダカラ $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_\gamma = \bar{\mathfrak{R}}$ 以外ノ場合ハ、コレデ証明出來タワケデアル。$\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{R}}$ ノトキハ $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{u}$ ナル故明ラカニ定理ハ成立スル。